CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1983

•

CONCOURS SCIENCES

CALCUL NUMERIQUE

Durée : 2 heures

Jeudi 5 mai 1983 de 14 heures à 16 heures

•

Le candidat est invité à préciser les moyens de calcul qu'il utilise (règle ou cercle à calcul, tables numériques, calculette avec ou sans fonctions mathématiques, programmable ou non) en indiquant la précision que lui procurent ces outils. Les calculs seront présentés dans des tableaux clairs où figureront tous les résultats intermédiaires.

– I –

Soit un polynôme P de degré n à coefficients réels :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \,. \qquad (1)$$

Définissons récursivement les polynômes B_i par :

$$\begin{cases} B_0(x) = a_0 \\ B_i(x) = x\, B_{i-1}(x) + a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (2)$$

et les polynômes C_i par :

$$\begin{cases} C_0(x) = B_0(x) \\ C_i(x) = x\, C_{i-1}(x) + B_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \,. \end{cases} \qquad (3)$$

Le nombre réel α étant fixé, définissons le polynôme Q_α par :

$$Q_\alpha(x) = B_0(\alpha)\, x^{n-1} + B_1(\alpha)\, x^{n-2} + \ldots + B_{n-1}(\alpha) \,.$$

a) Montrer que :

$$P(x) = (x - \alpha)\, Q_\alpha(x) + B_n(\alpha)$$

et en déduire :

$$P(\alpha) = B_n(\alpha) \,.$$

b) Montrer que :

$$Q_\alpha(\alpha) = C_{n-1}(\alpha)$$

et en déduire :

$$P'(\alpha) = C_{n-1}(\alpha) \,.$$

La méthode de calcul de $P(\alpha)$ et $P'(\alpha)$ décrite par les relations (2) et (3) sera utilisée systématiquement par la suite.

.../...

178

– II –

Soit le polynôme :

$$P(x) = 0{,}03x^5 + 0{,}091x^4 + 0{,}15x^3 - 0{,}364x^2 - 1{,}5x - 0{,}455 .$$

a) Calculer $P(x)$ pour $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ et 3 ; en déduire que P a au moins trois racines réelles qu'on encadrera.

b) Montrer que P''' n'a aucune racine réelle et en déduire le nombre de racines réelles de P, P' et P''.

c) Calculer une approximation de la racine de P voisine de $\frac{5}{2}$ en utilisant la méthode de Newton et vérifier que le carré de cette approximation est proche d'un entier n_0 .

d) Vérifier que $P(x)$ est divisible par $x^2 - n_0$ et en déduire une seconde racine de P .

e) Calculer une approximation de la troisième racine de P en utilisant la méthode de Newton à partir de $x_0 = -\frac{1}{2}$.

– III –

a) Vérifier que $P'(x)$ est divisible par $x^2 - 2$ et en déduire les racines réelles de P' .

b) Donner une approximation de la racine de P'' en utilisant la méthode de Newton à partir de $x_0 = \frac{1}{2}$.

c) Tracer le graphe de P sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ en faisant figurer les points remarquables (échelle conseillée : 1 unité = 2,5 cm).

N.B. – La précision de 10^{-3} dans le calcul des racines suffit largement pour assurer un tracé précis.

FIN